



TITLE:

# 例外領域上の超幾何関数について (概均質ベクトル空間の展望)

AUTHOR(S):

長岡, 昇勇

---

CITATION:

長岡, 昇勇. 例外領域上の超幾何関数について(概均質ベクトル空間の展望). 数理解析研究所講究録 1985, 555: 1-8

ISSUE DATE:

1985-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98945>

RIGHT:

# 例外領域上の超幾何関数について

近畿大理工 長岡昇勇 (Shōyū Nagaoaka)

G. Shimura は [3]において, 非解析的 Eisenstein 級数への応用を念頭におき, 拡張された合流型超幾何関数をいくつかの tube 型領域上で考察した. 実際, 拡張された超幾何関数は, 非解析的 Eisenstein 級数の Fourier 係数を, あるアテール空間上の積分として表示したとき, その archimedean part に表われる. [3]の Introduction で述べられている様にその結果は, Jordan 環の理論を使い統一的に記述されるが, このノートでは, Cayley 数を成分とする unitary 行列からなる Jordan 環の場合(もちろん, これは例外型 Jordan 環の場合も含んでいる)に, [3]と同様の結果を記述する.

$\mathbb{C}_R$  を real Cayley algebra とし, その standard な基底を固定して考える ([2] 参照).  $1 \leq m \leq 3$  なる整数  $m$  に対して

$k(m) = 4m - 3$  とおく.  $\mathbb{R}$  上の vector 空間  $\mathcal{J}_R^{(m)}$  を  $\mathcal{J}_R^{(m)} = \{x \in M_m(\mathbb{C}_R) \mid {}^t \bar{x} = x\}$  で定義する. ここで  $\bar{x}$  は  $x$  の各成分の

Cayley conjugation を表わす.  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$  は 其中に積  $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$  を定義することにより real Jordan algebra となる.  $m=3$  のとき, すなわち  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(3)}$  が例外型 Jordan 環と呼ばれるものである ([1] 参照).  $x = (x_{ij}) \in \mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$  に対して  $\text{tr}(x) = \sum x_{ii} \in \mathbb{R}$  と書き,  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$  上の内積  $(,)$  を  $(x, y) = \text{tr}(x \circ y)$  で定義する. さらに,  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$  上の polynomial function  $\det$  を次の様に定義する.  $m=3$  のとき

$$\det(x) = \prod_{i=1}^3 x_{ii} - x_{11}N(x_{23}) - x_{22}N(x_{13}) - x_{33}N(x_{12}) + T((x_{12}x_{23})\bar{x}_{13}),$$

ここで  $N(a) = a\bar{a} = \bar{a}a$ ,  $T(a) = a + \bar{a}$  ( $a \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ ).  $m=2$  のとき

$$\det(x) = x_{11}x_{22} - N(x_{12}). \quad \mathcal{K}_m \subseteq \mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)} \text{ の元 square } x \circ x$$

全体のなる集合とし,  $\mathcal{K}_m^+$  をその部分集合で,  $\det \neq 0$  なる条件を満たすものから成るものとする.  $\mathcal{K}_3^+$  は例外型錐と呼ばれるものである [1]. この錐を使って,  $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}^{(m)} = \mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  の中に tube 領域  $\mathbb{H}_m = \mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)} + i\mathcal{K}_m^+$  を定義する.  $\mathbb{H}_3$  は  $E_7$  型の例外領域であり,  $\mathbb{H}_2$  は 10 次元 IV 型領域,  $\mathbb{H}_1$  は複素上半平面である.  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)} \subseteq \mathbb{R}^{m \times m}$  と同一視することにより  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$  上に Euclidean measure  $dx$  を定義する. ここで我々は錐  $\mathcal{K}_m^+$  に付随する gamma 関数  $\Gamma_m(s)$  を

$$\Gamma_m(s) = \int_{\mathcal{K}_m^+} e^{-\text{tr}(x)} \det(x)^{s - \kappa(m)} dx$$

で定義する. 積分は  $\text{Re}(s) > \kappa(m) - 1$  なる条件のもとで

収束し、次の等式を満たす。

$$\Gamma_m(s) = \pi^{2m(m-1)} \prod_{n=0}^{m-1} \Gamma(s-4n),$$

そこで  $\Gamma(s)$  は 通常の gamma 関数である。

$g \in \mathcal{H}_m^+$ ,  $h \in \mathcal{J}_R^{(m)}$ ,  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$  に対して、次の様におく

$$\eta_m(g, h; \alpha, \beta) = \int_{x \pm h \in \mathcal{H}_m^+} e^{-(g, x)} \det(x+h)^{\alpha-k(m)} \det(x-h)^{\beta-k(m)} dx,$$

$$\eta_m^*(g, h; \alpha, \beta) = \det(g)^{\alpha+\beta-k(m)} \eta_m(g, h; \alpha, \beta)$$

そこで 関数  $\eta_m$  から 一般化した超幾何関数

$$\zeta_m(g; \alpha, \beta) = \int_{\mathcal{H}_m^+} e^{-(g, x)} \det(\varepsilon_m + x)^{\alpha-k(m)} \det(x)^{\beta-k(m)} dx$$

で表わされることに注意しておく。ここで  $g \in \mathcal{H}_m^+$  で  $\varepsilon_m$  は  $m$  次単位行列を表わす。実際、 $\eta_m$  と  $\zeta_m$  の関係は次の通り。

$$\eta_m(g, \varepsilon_m; \alpha, \beta) = e^{-\tilde{h}(g)} 2^{\alpha+\beta-k(m)} \zeta_m(2g; \alpha, \beta).$$

ここで、いくつかの記号を導入しておく。まず、 $\mathcal{J}_R^{(m)}(p, q, r)$  を  $\mathcal{J}_R^{(m)}$  の元で  $p$  個の正固有値、 $q$  個の負固有値、 $r$  個の零固有値をもつものの全体のなす集合とする。上記、固有値の定義を述べておく。 $m=3$  のとき、 $\mathcal{J}_R^{(m)}$  の元  $h$  の固有値は、

3次方程式  $t^3 - \tau(h)t^2 + \tau(h \times h)t - \det(h) = 0$  の解として定義される。ここで  $x \times y$  は、 $x$  と  $y$  の cross 積を表わす。また、この3次方程式は重複をこめて3実解をもつことに注意しておく。 $m=2$  のときは、 $h \in \mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(2)}$  の固有値は2次方程式  $t^2 - \tau(h)t + \det(h) = 0$  の解として定義される。ここで、さらに、 $h \in \mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ 、 $g \in \mathcal{K}_m^+$  に対して、 $g$  に相対する  $h$  の固有値という概念を、次の様に定義する。 $m=3$  のとき3次方程式  $t^3 - (g, h)t^2 + (g \times g, h \times h)t - \det(g)\det(h) = 0$  の解として定義する。この3次方程式もまた、重複をこめて3実解をもつ。 $m=2$  のときは、2次方程式  $t^2 - (g, h)t + \det(g)\det(h) = 0$  の解として定義される。そこで、 $g$  に相対する  $h$  の固有値のうち正なるもの全体の和、積をそれぞれ  $\tau_+(hg)$ 、 $\delta_+(hg)$  で表わそう。さらに  $\tau_-(hg) = \tau_+((-h)g)$ 、 $\delta_-(hg) = \delta_+((-h)g)$ 、 $\tau(hg) = \tau_+(hg) + \tau_-(hg)$  とおく。また  $\mu(hg)$  で、 $g$  に相対する  $h$  の固有値のうち非零なるものの最小絶対値を表わすものとする。

今、 $g \in \mathcal{K}_m^+$ 、 $h \in \mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}(p, q, r)$ 、 $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$  に対して

$$\begin{aligned} \omega_m(g, h; \alpha, \beta) = & 2^{-p\alpha - q\beta} \Gamma_p(\beta - 4(m-p))^{-1} \Gamma_q(\alpha - 4(m-q))^{-1} \\ & \cdot \Gamma_r(\alpha + \beta - \kappa(m))^{-1} \delta_+(hg)^{\kappa(m) - \alpha - 2\beta} \delta_-(hg)^{\kappa(m) - \beta - 2p} \\ & \cdot \eta_m^*(g, h; \alpha, \beta) \end{aligned}$$

と定義する. 最初の主定理は 次の様に述べられる.

定理 1. 関数  $\omega_m$  は  $(\alpha, \beta)$  の関数として,  $\mathbb{C}^2$  全体に holomorphic に解析接続され, 次の関数等式を満たす.

$$(1) \quad \omega_m(g, h; \alpha, \beta) = \omega_m(g, h; k(m) + 4r - \beta, k(m) + 4r - \alpha)$$

さらに,  $\mathbb{C}^2$  の任意の compact set  $T$  に対し, 正定数  $A, B$  が存在して

$$(2) \quad |\omega_m(g, h; \alpha, \beta)| \leq A e^{-\tau(hg)/2} (1 + \mu(hg))^{-B}$$

for every  $(g, h) \in k_m^+ \times J_{\mathbb{R}}^{(m)}$  and every  $(\alpha, \beta) \in T$ ,  
が成立する.

この結果は, [3] の Theorem 4.2 の analogy である.

次の様な級数を考える.

$$S_m(z, L_m; \alpha, \beta) = \sum_{a \in L_m} \det(z+a)^{-\alpha} \det(\bar{z}+a)^{-\beta}$$

ここで  $z$  は  $H_m$  上の変数,  $L_m$  は  $J_{\mathbb{R}}^{(m)}$  内の lattice.

$(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ . この級数は,  $H_m \times \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \mid \operatorname{Re}(\alpha + \beta) > 2k(m) - 1\}$  上で locally uniformly に収束することが確かめられる. [3] に従って,  $J_{\mathbb{R}}^{(m)}$  内の lattice  $L$  が algebraic である, ということとを, 次の様に定義する. すなわち,

$\mathcal{I}_{\mathbb{R}}^{(m)}$  を  $\mathbb{R}^{mK(m)}$  と同一視したとき, 各成分が代数的数からなっているときを, いう. 定理1の応用として, 次の定理が得られる.

定理2.  $L \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}^{(m)}$  内の algebraic lattice とする. すると

$$\text{関数 } \Gamma_m(\alpha + \beta - K(m))^{-1} S_m(z, L; \alpha, \beta)$$

は,  $(\alpha, \beta)$  に関して holomorphic function として,  $\mathbb{C}^2$  全体に解析接続される.

ここで

$$S_m(z, L; \alpha) = \sum_{a \in L} \det(z+a)^{-\alpha}$$

$$S_m^*(z, L; \alpha) = \lim_{s \rightarrow 0} S_m(z, L; \alpha + s, s), \quad \text{とおく.}$$

すると, 級数  $S_m(z, L; \alpha)$  は,  $\operatorname{Re}(\alpha) > 2K(m) - 1$  で収束し

$(z, \alpha)$  に関する holomorphic function となる. 明らかに

$\operatorname{Re}(\alpha) > 2K(m) - 1$  なら,  $S_m^*(z, L; \alpha)$  は  $S_m(z, L; \alpha)$  に一致する. これについて 次の成立する.

定理3.  $L \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}^{(m)}$  内の algebraic lattice とする. すると,  $\operatorname{Re}(\alpha) > K(m)$  に対して  $S_m^*(z, L; \alpha)$  は  $S_m(z, L; \alpha)$  に一致する. さらに, 次式が成立する:

$$\begin{aligned} & \mu(\mathcal{I}_{\mathbb{R}}^{(m)}/L) S_m^*(z, L; K(m)) \\ &= 2^{-4m(m-1)} i^{-mK(m)} \Gamma_m(K(m))^{-1} \sum 2^{-r(\mathbf{h})} e^{2\pi i(\mathbf{h}, \mathbf{z})}, \end{aligned}$$

ここで、最後の和は、 $L' \cap J_{\mathbb{R}}^{(m)}(P, 0, \gamma)$  の元全体にわたる。

$L'$  は、 $L$  の dual lattice,  $\gamma(h) = \gamma$  とする。

最後に、いくつかの remarks を与えよう。W. L. Baily, Jr. は論文[1]において、例外 modular 群  $\Gamma$  に関する Eisenstein 級数を研究した。我々は次の級数を考えよう。

$$E(z, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_0} |j(z, \gamma)|^s, \quad (s \in \mathbb{C}, z \in H_3),$$

ここで  $\Gamma_0$  は  $\Gamma$  とある parabolic 部分群との共通部分。

ここで

$$\gamma_m(s) = \pi^{-ms} \Gamma_m(s), \quad \zeta_m(s) = \prod_{n=0}^{m-1} \zeta(s-4n)$$

とおく。  $\zeta(s)$  は Riemann の zeta 関数。そこで、

$$\xi(s) = \gamma_3\left(\frac{s}{2}\right) \zeta_3(s) \det(\operatorname{Im}(z))^{\frac{s}{2}} E(z, s)$$

と置いてみる。  $E(z, s)$  の Fourier 係数は singular series と上記  $\omega_3$  の積として表現される。  $\omega_3$  の性質より次の事実が予想される。すなわち、  $\xi(s)$  は  $s$  に関する meromorphic function として解析接続され、関数等式

$$\xi(s) = \xi(18-s)$$

を満たす。



## 文献

- [1] W. L. Baily, Jr.: An exceptional arithmetic group and its Eisenstein series. *Ann. of Math.*, 91, 512-549 (1970).
- [2] \_\_\_\_: *Introductory Lectures on Automorphic Forms*. Publication of Math. Soc. of Japan, 12 (1973).
- [3] G. Shimura: Confluent hypergeometric functions on tube domains. *Math. Ann.*, 260, 269-302 (1982).
- [4] \_\_\_\_: On Eisenstein series. *Duke Math. J.*, 50, 417-476 (1983).